

Infos : Eval du cours sur Is-Academia
(actuellement 46 % participation)

Inscription examen blanc :

⚠ choisir adresse mail epfl.

Série 6 aura probablement du retard
(lundi en fin de journée)

Exos : Salles du CM pleines, salles du CO
out de la place!

Rappel :

$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m : x \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \quad l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$
 $d(f(x), l) = \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$



Définition 2.35 (Dérivable, dérivée)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

(i), (ii) & (iii)

On dit que f est dérivable (à gauche / à droite) en x_0 si la limite

$\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}^m$ existe. On note alors cette limite $f'(x_0) \in \mathbb{R}^m$

→ lire poly définition 2.35 p. 62.

Définition 2.36 (C^k)

Soit D une union d'intervalles (différents d'intervalles du style $[a, a]$) deux à deux disjoints, et $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

(i) On note $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ si f est dérivable et $f' \in C^0(D, \mathbb{R}^m)$

(ii) Plus généralement, pour $k \geq 2$, $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ si $f' \in C^{k-1}(D, \mathbb{R}^m)$, toutes les dérivées d'ordre k ou moins existent et sont continues. $\overline{f^{(j)}}$ est la dérivée d'ordre j

Définition 2.37 (courbe, courbe régulière) Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$

(i) On dit que f est une courbe si $f \in C^0(I, \mathbb{R}^m)$

(ii) On dit que f est une courbe régulière si $f \in C^1(I; \mathbb{R}^m)$

$$f'(x) \neq 0$$

Théorème 2.38

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ définie au voisinage de x_0 , $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$

Alors,

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall 1 \leq i \leq m, \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$

(ii) Si $x_0 \in D$, f continue en $x_0 \iff \forall 1 \leq i \leq m, f_i$ est continue en x_0

(iii) Si $x_0 \in D$, f est dérivable en $x_0 \iff \forall 1 \leq i \leq m, f_i$ est dérivable en x_0 , on a alors de plus ^{Analyse II} $f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$ ^{Analyse I}

Définition 2.39 longueur.

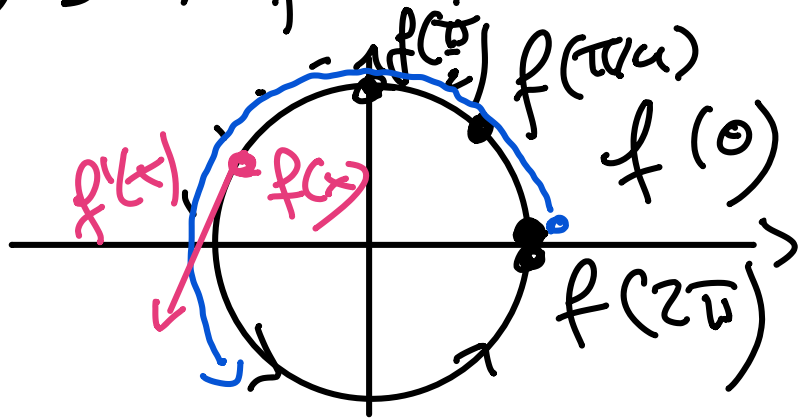
Soit $f \in C'([a, b]; \mathbb{R}^m)$ une courbe régulière. On définit la longueur de f par

$$L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Remarque 2.40 : La longueur de f est en fait la longueur de $f([a, b])$

Exemples 2.41

(i) Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$



$$f'(x) = (-\sin(x), \cos(x))$$

$$\begin{aligned} \text{La longueur est } L &= \int_0^{2\pi} \|f'(x)\| dx = \int_0^{2\pi} \|(-\sin(x), \cos(x))\| dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)} dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi \end{aligned}$$

(ii) Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = \left(x^3, -\frac{3}{\sqrt{2}}x^2, 3x\right)$

$$f'(x) = \left(3x^2, -3\sqrt{2}x, 3\right)$$

$$\begin{aligned} \|f'(x)\| &= \sqrt{(3x^2)^2 + (-3\sqrt{2}x)^2 + 3^2} = \sqrt{9x^4 + 18x^2 + 9} \\ &= 3\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} = 3\sqrt{(x^2 + 1)^2} = 3(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$L = \int_0^1 \|f'(x)\| dx = \int_0^1 3x^2 + 3 dx = \left[x^3 + 3x\right]_0^1 = 4$$

(iii) Soit $f: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x) = \left(3\cos(x), 3\sin(x), \frac{x}{4\pi}\right)$$

$$f'(x) = \left(-3\sin(x), 3\cos(x), \frac{1}{4\pi}\right)$$

$$\|f'(x)\| = \sqrt{9\sin^2(x) + 9\cos^2(x) + \frac{1}{16\pi^2}} = \sqrt{9 + \frac{1}{16\pi^2}}$$

$$L = \int_0^{4\pi} \|f'(x)\| dx = 4\pi \sqrt{9 + \frac{1}{16\pi^2}}$$

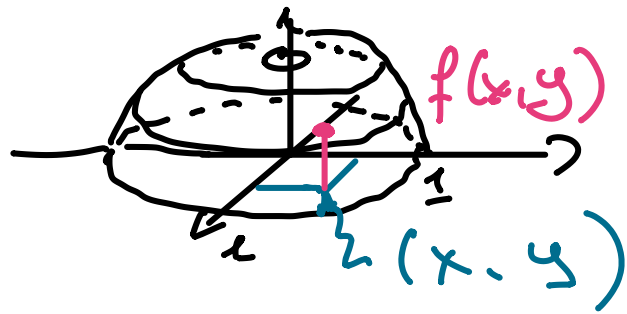
Chapitre 3 : Limites de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

§3.1 Introduction, exemples

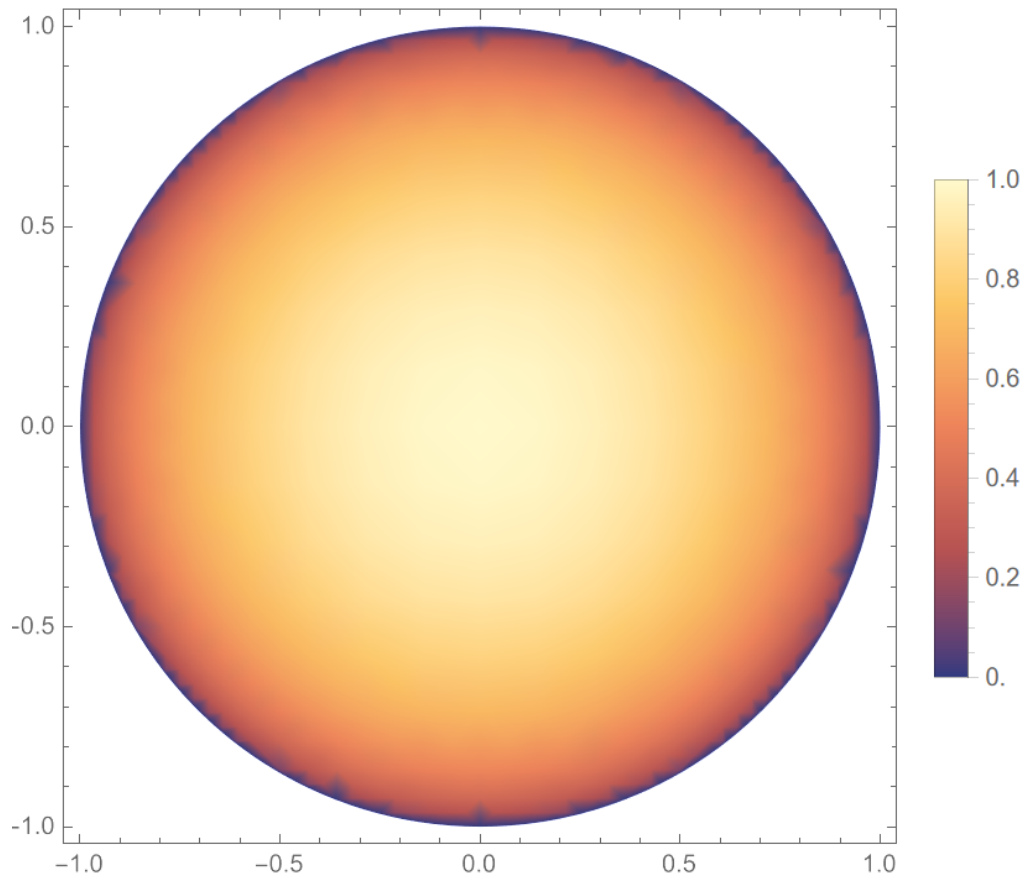
Exemples 3.1 : (i) Les champs scalaires ($m=1$)

Un champ scalaire est une fonction d'un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple $D = \overline{B}((0,0), 1)$, et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$
définie par $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$



$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$



un "graphe de la fonction"
sous forme de heatmap

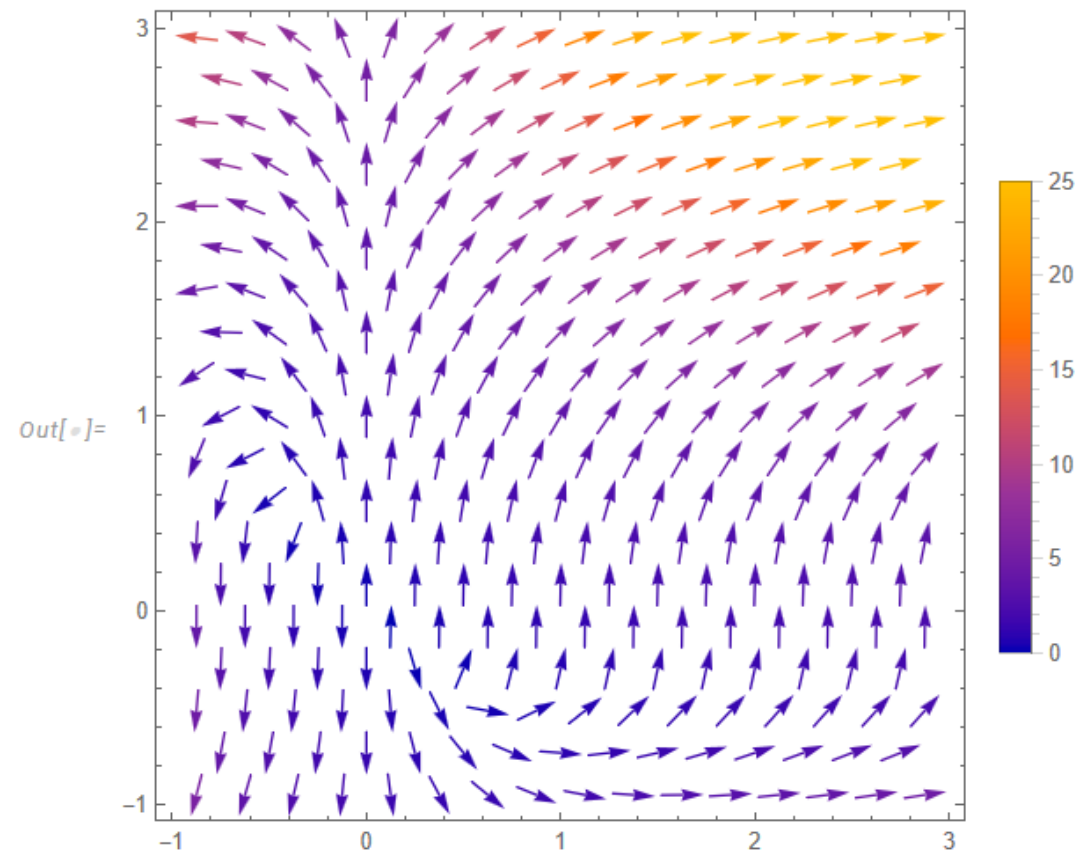
(ii) Champs vectoriels ($v=v$). Un champ vectoriel est une fonction d'un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Par exemple : $D =]-1, 3[\times]-1, 3[$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini
par $f(x, y) = (xy^2, \log(x+1) + y)$

```
In[ ]:= f[x_, y_] = {x*y^2, Log[x+1] + y}
```

```
Out[ ]= {x y^2, y + Log[1 + x]}
```

```
In[ ]:= VectorPlot[f[x, y], {x, -1, 3}, {y, -1, 3}, PlotLegends -> Automatic]
```



(iii) Tent le reste. Par exemple $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$, définie par

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, x + 5, \frac{y}{x^2 + z^2 + 1}, \log(x^2 + y^2 + z^4 + 14), x \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $f_1(x, y, z)$ $f_2(x, y, z)$ $f_5(x, y, z)$

Définition 3.2 (Fonction bornée)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ non-vide, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$. On dit que f est bornée si $\exists M > 0$ tq $\forall x \in D, \|f(x)\| \leq M$.

§ 3.2 Limites de fonctions à plusieurs variables

Définition 3.3 (Définie au voisinage, limite)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$

(i) On dit que f est définie au voisinage de $\tilde{x}$
si $\exists \delta > 0$ tq $B(\tilde{x}, \delta) \setminus \{\tilde{x}\} \subseteq D$

$$\textcircled{n=1}]\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta[\setminus \{\tilde{x}\}$$

(ii) Supposons que f est définie au voisinage de $\tilde{x}$ et $l \in \mathbb{R}^m$
On dit que l est la limite de f en $\tilde{x}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in B(\tilde{x}, \delta) \setminus \{\tilde{x}\}, \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$$

$$\text{On note alors } l = \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x).$$

$$\textcircled{n=1} x \in]\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta[\setminus \{\tilde{x}\}$$

$$\Leftrightarrow 0 < |x - \tilde{x}| < \delta$$

$$\textcircled{n \geq 2} x \in B(\tilde{x}, \delta) \setminus \{\tilde{x}\}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \|x - \tilde{x}\| < \delta$$

Theorem 3.4

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$
définie au voisinage de $\tilde{x}$ et $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

$$(i) \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) = l \quad (ii) \forall 1 \leq i \leq m, \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f_i(x) = l_i$$

$$(iii) \forall \text{ suite } (a_k) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ tq } \forall k, a_k \in D \setminus \{\tilde{x}\} \text{ et } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \tilde{x}$$

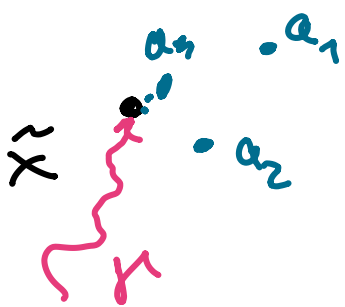
$$\text{on a } \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = l.$$

(Caractérisation des limites de fonctions
par les suites)

$$(iv) \forall \text{ courbe } \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tq } \gamma([a, b]) \subseteq D \setminus \{\tilde{x}\}$$

$$\text{on a } \lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma(t)) = l$$

(Caractérisation des limites de
fonctions
par les courbes)



Proposition 3.5 (Propriétés algébriques)

Soient $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ définies au voisinage de $\tilde{x}$ et tq les limites $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x)$ & $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} g(x)$ existent.

Alors,

$$(i) \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \|f(x)\| = \left\| \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) \right\|$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x) + \beta \cdot \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} g(x).$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x), \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} g(x) \rangle$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} d(f(x), g(x)) = d(\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x), \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} g(x))$$

$$(v) \text{ Si } m=1, \text{ et } \lim_{x \rightarrow \tilde{x}} g(x) \neq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} g(x)}.$$

Remarque 3.6 : On va développer des outils pour discuter la limite de champs scalaire, ou que pour $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on peut regarder les choses composante / composante.

Exemple 3.7 (Problème no 1)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Intéressons nous à la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Idee no 1: Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \quad \text{ou} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$$